

Cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi-Brauer

Alena Pirutka

14 janvier 2011

Résumé

Soit K le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre, définie sur un corps fini \mathbb{F} , $\text{car.}\mathbb{F} \neq 2$. Soit C/K une conique. Parimala et Suresh [PS] ont montré que le groupe de cohomologie non ramifiée $H_{\text{nr}}^3(K(C)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nul pour tout $l \neq \text{car.}\mathbb{F}$. Dans cette note on étend leur résultat aux variétés de Severi-Brauer associées à une algèbre centrale simple dont d'indice l est premier et différent de $\text{car.}\mathbb{F}$.

1 Introduction

Soit K un corps. Pour n un entier inversible sur K , on note μ_n le K -schéma en groupes (étale) des racines n -ièmes de l'unité. Pour j un entier positif on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \dots \otimes \mu_n$ (j fois). On pose $\mu_n^{\otimes j} = \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mu_n^{\otimes (-j)}, \mathbb{Z}/n)$ si j est négatif et $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$. Ces k -schémas en groupes donnent des faisceaux étales, notés encore $\mu_n^{\otimes j}$, sur toute K -variété X . On note $H^i(X, \mu_n^{\otimes j})$ les groupes de cohomologie étale de X à valeurs dans $\mu_n^{\otimes j}$. Lorsque K contient une racine primitive n -ième de l'unité, on a un isomorphisme $\mu_n^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout j .

Soit K un corps. Soit F un corps de fonctions sur K . Soient $j \geq 1$ un entier naturel et $i \in \mathbb{Z}$ un entier relatif. Dans la suite on va utiliser les notions suivantes de cohomologie *non ramifiée* :

- (i) $H_{\text{nr}}^j(F/K, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \text{Ker}[H^j(F, \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_{j,A}} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})]$. Dans cette formule,

A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F , contenant le corps K . Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application $\partial_{j,A}$ est l'application résidu.

- (ii) Pour X une K -variété intègre, on note $H_{\text{nr}}^j(X, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\text{déf}}{=} H_{\text{nr}}^j(K(X)/K, \mu_n^{\otimes i})$.

Pour X propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus permettent d'identifier $H_{\text{nr}}^j(X, \mu_n^{\otimes i})$ au groupe de cohomologie de Zariski $H^0(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$, où $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$ désigne le faisceau de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^j(U, \mu_n^{\otimes i})$ (cf. [CT]).

(iii) Si X est régulier en codimension 1, on pose

$$H_{\text{nr}}^j(K(X)/X, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \text{Ker } \partial_{j, \mathcal{O}_{X,x}}$$

la cohomologie non ramifiée de $K(X)$ par rapport à X .

Soit maintenant K le corps des fractions d'une surface lisse géométriquement intègre S , définie sur un corps fini \mathbb{F} . Dans [PS], Parimala et Suresh montrèrent que $H_{\text{nr}}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$, $l \neq \text{car.}\mathbb{F}$, pour X une conique sur K . Le but de cette note est d'étendre leurs arguments au cas des variétés de Severi-Brauer d'indice premier :

Théorème 1.1. *Soit K le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S , définie sur un corps fini \mathbb{F} . Soit X la variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche de centre K et d'indice premier $l \neq \text{car.}\mathbb{F}$. On a alors*

$$H_{\text{nr}}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) = 0$$

pour tout premier l' , $l' \neq \text{car.}\mathbb{F}$.

Remarque 1.2. Ce résultat est aussi vrai pour une variété de Severi-Brauer associée à une K -algèbre centrale simple d'indice premier $l \neq \text{car.}\mathbb{F}$. En effet, $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) = H_{\text{nr}}^3(X \times \mathbb{P}_K^n, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2))$ d'après [CTOj] 1.2.

Pour montrer ce théorème, on doit essentiellement établir que $H_{\text{nr}}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2}) = 0$ (cf. section 2). Pour ce faire, on suit les mêmes étapes que dans [PS]. On montre d'abord que tout élément $\beta \in H_{\text{nr}}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$ provient d'un élément $\xi \in H^3(K, \mu_l^{\otimes 2})$ (cf. section 2). Dans la section 3, en utilisant le principe de type local-global de [PS], on montre que l'on peut en effet supposer que $\xi \in H_{\text{nr}}^3(K/S, \mu_l^{\otimes 2})$. D'après le théorème de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé [CTSS], le groupe $H_{\text{nr}}^3(K/S, \mu_l^{\otimes 2})$ est nul, ce qui nous permet de conclure (cf. section 3). Dans la section 4, on donne aussi quelques détails de la preuve du principe local-global de [PS].

2 Comparaison entre cohomologie non-ramifiée en degré trois d'une variété de Severi-Brauer et cohomologie du corps de base

Proposition 2.1. *Soit K un corps. Soit X la variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche D de centre K et d'indice premier $l \neq \text{car.}K$. L'application naturelle*

$$H^3(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\phi} H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

est surjective.

Remarque 2.2. D'après un résultat de Peyre [Pe], on comprend explicitement le noyau de ϕ : un élément de $\ker \phi$ s'écrit comme un cup-produit $\alpha \cup f$ où $\alpha \in Br K$ est la classe de D et $f \in K^*$. Cela ne nous est pas nécessaire pour la suite.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence des résultats de B. Kahn [K1], [K2]. Supposons d'abord que K est parfait. Soient K^s une clôture séparable de K , $\bar{X} = X \times_K K^s$ et $G = Gal(K^s/K)$. D'après [K1] 5.3(8) et [K2] 2.5, pour X une K -variété de Severi-Brauer, on a alors un complexe :

$$0 \rightarrow \text{Coker} \phi \{l\} \rightarrow \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G] \{l\} \xrightarrow{\delta} Br K \{l\},$$

qui est exact sauf peut-être en terme au milieu. Si X est une conique, on a immédiatement $\text{Coker} \phi \{l\} = 0$ car $CH^2(\bar{X}) = 0$ (ce résultat est dû à Suslin, [Su]).

Supposons que $l \geq 3$. Puisque D est d'indice premier l , on a que $\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G] \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ ([MS], 8.7.2). Dans ce cas, d'après [K1] 7.1 et [K2] 2.5, on a explicitement $\delta(1) = 2[D] \neq 0$, où $[D]$ désigne la classe de D dans $Br K$ et $1 \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ est identifié au générateur de $\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G]$. Ainsi, sur un corps K parfait, l'application $H^3(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\phi} H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est surjective.

Dans le cas général, soit K' une clôture parfaite de K . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \xrightarrow{\phi} & H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^3(K', \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \xrightarrow{\phi'} & H_{nr}^3(X_{K'}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)). \end{array}$$

Soit $\beta \in H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. D'après ce qui précède, l'application ϕ' est surjective. Ainsi, il existe une extension finie K''/K dont le degré est une puissance de $\text{car}.K$, telle que $\text{Res}_{K''/K}(\beta)$ provient d'un élément de $H^3(K'', \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. Puisque $l \neq \text{car}.K$, on obtient le résultat par un argument de corestriction. □

Corollaire 2.3. Soit K le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S , définie sur un corps fini \mathbb{F} . Soit X la K -variété de Severi-Brauer associée à un corps gauche de centre K et d'indice premier $l \neq \text{car}.\mathbb{F}$. Alors

- (i) pour tout $l' \neq l, \text{car}.K$, on a $H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) = 0$;
- (ii) $H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$ et l'image de l'application naturelle

$$H^3(K, \mu_l^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(K(X), \mu_l^{\otimes 2})$$

contient le groupe $H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$.

Démonstration. Soit K' une extension de K d'indice l , telle que $X_{K'}$ est isomorphe à un espace projectif. Par le même argument que dans [CT] 2.1.10, on a une application entre les cohomologies non ramifiées

$$H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)).$$

Puisque $K'(X_{K'})$ est une extension transcendante pure de K' , on a un isomorphisme ([CTOj] 1.2) :

$$H_{nr}^3(K'/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^3(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)).$$

Le groupe $H_{nr}^3(K'/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2))$ est nul d'après [CTSS] p.790. Un argument de cores-
triction montre alors que pour $l' \neq l$, on a $H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{l'}/\mathbb{Z}_{l'}(2)) = 0$, et que tout
élément de $H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est annulé par l . On a alors que tout élément de
 $H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est annulé par l et il vient donc de $H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$ par [MS]
(p. 339).

Soit $\xi \in H_{nr}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2})$. On voit ξ aussi comme un élément de $H_{nr}^3(X, \mu_l^{\otimes 2})$ et on
déduit de la proposition précédente que ξ provient d'un élément $\beta \in H^3(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$.
Montrons que β est annulé par l .

Par le même raisonnement que précédemment, l'image ξ' de ξ dans $H^3(K'(X_{K'}), \mu_l^{\otimes 2})$
est nulle. En effet, $\xi' \in H_{nr}^3(K'(X_{K'})/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^3(K'/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2}) = 0$. On en déduit que
l'image de β dans $H^3(K', \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nulle. On a alors : $l\beta = Cor_{K'/K} \circ Res_{K'/K}(\beta) =$
 0 . D'après [MS], on a alors que β vient d'un élément de $H^3(K, \mu_l^{\otimes 2})$. □

3 Preuve du théorème 1.1

Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit R un anneau de valuation discrète dont on note K le corps des
fractions et k le corps résiduel. Soit X la variété de Severi-Brauer associée à un corps
gauche D de centre K et d'indice premier l , $(l, \text{car}.k) = 1$. Soit α la classe de D dans
 $Br K$. Soit $\xi \in H^3(K, \mu_l^{\otimes 2})$. Supposons que pour toute valuation v sur $K(X)$ induisant
sur K soit la valuation triviale, soit la valuation associée à R , le résidu $\partial_v(\xi_{K(X)})$ est
nul. On a alors :*

- (i) *si α est non ramifiée en R , alors $\partial_R(\xi)$ est un multiple de la spécialisation
 $\bar{\alpha} = \partial_R(\alpha \cup \pi)$, où l'on note π une uniformisante de R ;*
- (ii) *si α est ramifiée en R , alors ou bien ξ est non ramifiée en R , ou bien $\partial_R(\xi)$ est
isomorphe à une algèbre cyclique $(\partial_R(\alpha), c)$ pour $c \in k^*$.*

Démonstration. Pour prolonger la valuation sur K en une valuation sur $K(X)$ on
s'intéresse à la structure de la fibre spéciale d'un modèle de X au-dessus de R .

Quitte à changer K par son complété, on peut supposer que K est complet. Notons
d'abord que α est trivialisée par une extension non ramifiée de K . En effet, soit K_{nr}
l'extension maximale non ramifiée de K , soit R_{nr} l'anneau des entiers de K_{nr} et soit
 k^s une clôture séparable de k . On a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^2(R_{nr}, \mu_{l^n}) \rightarrow H^2(K_{nr}, \mu_{l^n}) \xrightarrow{\partial_R} H^1(k^s, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}).$$

Puisque k^s est séparablement clos, on a $H^1(k^s, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(R_{nr}, \mu_{l^n}) = H^2(k^s, \mu_{l^n}) =$
 0 , d'où $Br K_{nr}\{l\} = 0$ et donc α est trivialisée par une extension non ramifiée de K .

Supposons que α est non ramifiée. Dans ce cas, puisque α est trivialisée par une extension non ramifiée de K , on a que D se prolonge en une algèbre d'Azumaya Λ sur R , qui a pour la classe α (cf. [Fr], 1.1 et 1.2). Ainsi X se prolonge en un schéma de Severi-Brauer au-dessus de R , associé à Λ , dont la fibre spéciale \bar{X} est donnée par l'image de α dans $H^2(k, \mu_l)$, qui est précisément $\bar{\alpha}$.

Supposons que α est ramifiée. Sous l'hypothèse que α est trivialisée par une extension non ramifiée de K , d'après Artin [A] 1.4, il existe un modèle de X au-dessus de R dont la fibre spéciale géométrique est réduite et contient l composantes conjuguées sur k , qui sont des variétés rationnelles.

On voit ainsi qu'il existe une valuation v sur $K(X)$ qui prolonge la valuation sur K dont le corps résiduel $\kappa(v)$ est

- (i) $\kappa(v) = k(\bar{X})$, ou \bar{X} est une k -variété de Severi-Brauer de classe $\bar{\alpha}$, si α est non ramifiée ;
- (ii) $\kappa(v)$ est une extension transcendante pure d'une extension k' de k de degré l , sinon.

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_l^{\otimes 2}) & \xrightarrow{Res} & H^3(K(X), \mu_l^{\otimes 2}) \\ \downarrow \partial_R & & \downarrow \partial_v \\ H^2(k, \mu_l) & \xrightarrow{Res} & H^2(\kappa(v), \mu_l). \end{array}$$

Puisque ξ devient non ramifiée sur $K(X)$, on a que $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_l) \rightarrow H^2(\kappa(v), \mu_l)$. Si α est non ramifiée, $\partial_R(\xi)$ est alors un multiple de $\bar{\alpha}$ d'après le théorème d'Amitsur, ce qui établit (i).

Supposons maintenant que α et ξ sont ramifiées en R . Puisque $\kappa(v)$ est une extension transcendante pure de k' , $H^2(k', \mu_l)$ s'injecte dans $H^2(\kappa(v), \mu_l)$. Ainsi $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_l) \rightarrow H^2(k', \mu_l)$.

D'autre part, puisque α devient triviale sur $K(X)$, on voit que $\partial_R(\alpha)$ est dans le noyau de l'application $H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(k', \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ par le même argument. Puisque $\partial_R(\alpha)$ est un élément non nul dans $H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, il correspond à une extension galoisienne, cyclique, de degré l , qui coïncide avec k' car $\partial_R(\alpha) \in \text{Ker}[H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(k', \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})]$ et $[k' : k] = l$. Puisque $\partial_R(\xi)$ est dans le noyau de l'application $H^2(k, \mu_l) \rightarrow H^2(k', \mu_l)$, cela implique que $\partial_R(\xi)$ est isomorphe à une algèbre cyclique $(\partial_R(\alpha), c)$ pour $c \in k^*$ ([Se], p.211), ce qui établit (ii). □

Passons maintenant à la preuve du théorème 1.1. D'après 2.3, il suffit d'établir que $H_{\text{nr}}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2}) = 0$. Notons qu'on peut supposer que K contient une racine primitive l -ième de l'unité. En effet, le degré d de l'extension K' de K , obtenue en ajoutant une racine primitive l -ième de l'unité, divise $l - 1$. Ainsi $d \mid l - 1$ et $d \mid l$ (car $d \mid l - 1$ et $d \mid l$ implique $d \mid 1$). Ainsi $d = 1$ et $K' = K$. Soit α la classe de D dans $Br K$. Soit $\beta \in H_{\text{nr}}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. D'après 2.3, β provient d'un élément $\xi \in H^3(K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Montrons qu'il existe $f \in K^*$ tel que $\xi' =$

$\xi - \alpha \cup f \in H_{\text{nr}}^3(K/S, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Pour ce faire, on utilise le théorème 4.1 ci-après (principe local-global de [PS]). D'après ce théorème, il suffit de trouver, pour tout point $x \in S$ de codimension 1, un élément $f_x \in K_x^*$ tel que $\xi - \alpha \cup f_x \in H_{\text{nr}}^3(K_x, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. On a trois cas à considérer :

1. ξ est non ramifiée en x . Dans ce cas, $f_x = 1$ convient.
2. ξ est ramifiée en x et α est non ramifiée en x . D'après le lemme 3.1, $\partial_x(\xi) = r\bar{\alpha}$. Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_{S,x}$. Alors $f_x = \pi^r$ convient : $\partial_x(\xi - \alpha \cup \pi^r) = r\bar{\alpha} - r\bar{\alpha} = 0$.
3. ξ est ramifiée en x et α est ramifiée en x . D'après le lemme 3.1, on peut écrire $\partial_x(\xi) = (\partial_x(\alpha), c)$. On relève c en une unité $c' \in K_x$. Puisque $\partial_x(\alpha \cup c') = (\partial_x(\alpha), c)$, $f_x = c'$ convient.

Ainsi il existe $f \in K^*$ tel que $\xi' = \xi - \alpha \cup f \in H_{\text{nr}}^3(K/S, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. On a ainsi que β provient de $\xi' \in H_{\text{nr}}^3(K/S, \mu_l^{\otimes 2})$. D'après [CTSS], p.790, ce groupe est nul (cf. aussi [CT] 2.1.8). Ainsi $H_{\text{nr}}^3(K(X)/\mathbb{F}, \mu_l^{\otimes 2}) = 0$, ce qui termine la preuve du théorème 1.1. \square

4 Le principe local-global de Parimala et Suresh dans le cas d'indice premier

Le théorème suivant est démontré dans [PS] seulement dans le cas où α est un symbole. Rappelons ici la preuve pour nous assurer que l'hypothèse que α est d'indice l suffit.

Théorème 4.1. *Soit K le corps des fractions d'une surface projective et lisse, géométriquement intègre S , définie sur un corps fini \mathbb{F} . Soit l un entier premier, $(l, \text{car}.K) = 1$. Supposons que K contient une racine primitive l -ième de l'unité. Soit $\alpha \in H^2(K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ un élément d'indice l et soit $\xi \in H^3(K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *il existe $f \in K^*$ tel que $\xi - \alpha \cup f \in H_{\text{nr}}^3(K/S, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$;*
- (ii) *pour tout point $x \in S$ de codimension 1, il existe un élément non nul f_x dans le complété K_x de K en x tel que $\xi - \alpha \cup f_x \in H_{\text{nr}}^3(K_x, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.*

Soit K le corps des fractions d'une surface régulière propre, géométriquement intègre S , définie sur un corps k . Soit l un entier premier, $(l, \text{car}.k) = 1$. Supposons que K contient une racine primitive l -ième de l'unité. Soit $\alpha \in H^2(K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ un élément d'indice l . Pour démontrer le principe 4.1 on va utiliser la théorie de ramification d'algèbres à division, développée par Saltman ([S1], [S2]).

Soit $\text{ram}_S(\alpha)$ le diviseur de ramification de α dans S . D'après la résolution des singularités de surfaces, quitte à éclater S , on peut supposer que le support de $\text{ram}_S(\alpha)$ est l'union des courbes régulières intègres à croisements normaux. On note C_1, \dots, C_n ces courbes. D'après Saltman, après éventuellement quelques éclatements, on peut associer à chaque C_i son coefficient s_i . La construction de s_i tient compte de la ramification de α au-dessus des points d'intersections des divers C_i et C_j . Pour la suite on n'aura pas besoin de détailler cette construction.

Soient F_1, \dots, F_r des courbes irréductibles régulières et propres dans S , telles que $\{C_1, \dots, C_n, F_1, \dots, F_r\}$ soient à croisements normaux. Soient m_1, \dots, m_r des entiers. L'assertion suivante est démontrée dans [PS], 2.2 (et utilise [S1], 4.6 et [S2], 7.8) :

Proposition 4.2. *Avec les notations précédentes, il existe $f \in K^*$ tel que*

$$\operatorname{div}_S(f) = \sum_{i=1}^n s_i C_i + \sum_{s=1}^r m_s F_s + \sum_{j=1}^t n_j D_j + lE'$$

où D_1, \dots, D_t sont des courbes irréductibles, distinctes de $C_1, \dots, C_n, F_1, \dots, F_r$, $(n_j, l) = 1$ et la spécialisation de α en D_j est dans $H_{nr}^2(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

Remarque 4.3. La spécialisation $\bar{\alpha}$ de α en D_j est définie par $\bar{\alpha} = \partial_{\mathcal{O}_{S,D_j}}(\alpha \cup \pi)$ où π est une uniformisante de \mathcal{O}_{S,D_j} , $\kappa(D_j)$ est son corps résiduel. Le groupe $H_{nr}^2(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ désigne ici le sous-groupe de $H^2(\kappa(D_j), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ formé des éléments qui sont non ramifiés pour toute valuation discrète de $\kappa(D_j)$ au-dessus d'un point fermé de D_j . Cette définition ne nécessite pas d'hypothèse de régularité de D_j .

On passe maintenant à la preuve du principe local-global de [PS].

Démonstration du théorème 4.1.

L'implication (i) \Rightarrow (ii) est immédiate. Montrons que (ii) \Rightarrow (i). On dispose alors des éléments f_x dans le complété K_x de K pour tout point $x \in S$ de codimension 1. Notons $\kappa(x)$ le corps résiduel de K_x .

Soit \mathcal{C} un ensemble fini de points de codimension 1 de S , qui consiste exactement des points de $\operatorname{ram}_S(\alpha) \cup \operatorname{ram}_S(\xi)$. Par l'approximation faible, il existe un élément $f \in K^*$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{C}$, f/f_x est une puissance l -ième dans K_x . On écrit :

$$\operatorname{div}_S(f) = C - \sum_{s=1}^r m_s F_s + lE$$

où C est à support dans \mathcal{C} et le support de E est disjoint de F_s , $s = 1, \dots, r$.

Ensuite, par l'approximation faible, on choisit $u \in K^*$ tel que

- (i) la valuation de u en F_i est m_i ;
- (ii) u est une unité en chaque point $x \in \mathcal{C}$ et l'image \bar{u}_x de u dans $\kappa(x)^*/(\kappa(x)^*)^l$ est $\bar{u}_x = \begin{cases} \partial_x(\alpha), & x \in \operatorname{ram}_S(\alpha); \\ \text{non nul}, & \text{sinon.} \end{cases}$

On pose $L = K(\sqrt[l]{u})$. On note $Y \xrightarrow{\pi} S$ la normalisation de S_L . Notons que la condition $(m_j, l) = 1$ assure que $Y \xrightarrow{\pi} S$ est ramifié en F_i . Ainsi on trouve une seule courbe \tilde{F}_i dans la préimage de F_i et, de plus, $\kappa(\tilde{F}_i) = \kappa(F_i)$. Soit $\tilde{Y} \xrightarrow{\eta} Y$ un modèle régulier de Y , tel que $\operatorname{ram}_{\tilde{Y}} \alpha_L$ et les transformés stricts des \tilde{F}_i , que l'on note aussi \tilde{F}_i , soient à croisements normaux.

On applique ensuite la proposition 4.2 à \tilde{Y} , α_L et \tilde{F}_i . On trouve $g \in L^*$ tel que

$$\operatorname{div}_{\tilde{Y}}(g) = C' + \sum_{s=1}^r m_s \tilde{F}_s + \sum_{j=1}^t n_j D_j + lE'$$

où C' est à support dans $\text{ram}_{\tilde{Y}}\alpha_L$. De plus, la spécialisation de α_L en D_j est dans $H_{nr}^2(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

Montrons que $\xi' \stackrel{\text{def}}{=} \xi - \alpha \cup fN_{L/K}(g)$ convient : $\xi' \in H_{nr}^3(K/S, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Soit $x \in S^{(1)}$. On a trois cas à considérer :

1. si $x \notin \text{ram}_S(\alpha) \cup \text{ram}_S(\xi) \cup \text{Supp}(fN_{L/K}(g))$, ξ' est non ramifiée en x .
2. Supposons que $x \in \text{ram}_S(\alpha) \cup \text{ram}_S(\xi)$. D'après le choix de f , on a $\partial_x(\xi - \alpha \cup f) = \partial_x(\xi - \alpha \cup f_x) = 0$. Montrons que $\partial_x(\alpha \cup N_{L/K}(g)) = 0$. On étend la valuation sur K donnée par x en une valuation v sur L . D'après le choix de u , α_L est triviale sur L_v . Ainsi $\partial_x(\alpha \cup N_{L/K}(g)) = \partial_x(\text{Cores}_{L_v/K_x}(\alpha_L \cup g)) = 0$.
3. Supposons que $x \in \text{Supp}(fN_{L/K}(g)) \setminus (\text{ram}_S(\alpha) \cup \text{ram}_S(\xi))$. On a alors $\partial_x(\xi') = \partial_x(\alpha \cup fN_{L/K}(g))$. On a
 $\text{div}_S(fN_{L/K}(g)) = \text{div}_S(f) - \pi_*\eta_*(\text{div}_{\tilde{Y}}(g))$. Puisque $\kappa(\tilde{F}_i) = \kappa(F_i)$, on en déduit

$$\text{div}_S(fN_{L/K}(g)) = C'' + \sum_{j=1}^t n_j \pi_*\eta_*(D_j) + lE'',$$

où C'' est supporté sur \mathcal{C} .

Soit $D'_j = \pi(\eta(D_j))$. Si $\pi_*\eta_*(D_j) = cD'_j$ est non nul et si $l \nmid c$, on a nécessairement que $\kappa(D'_j) = \kappa(D_j)$. Ainsi soit $\partial_x(\alpha \cup fN_{L/K}(g))$ est nul, soit c'est un multiple de la spécialisation de α en D'_j , qui est dans $H_{nr}^2(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ par le choix de g . Puisque D_j est une courbe sur un corps fini, $H_{nr}^2(\kappa(D_j)/D_j, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$. On obtient donc $\partial_x(\xi') = 0$, ce qui termine la preuve. \square

Références

- [A] M. Artin, *Left ideals in maximal orders*, Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981), pp. 182–193, Lecture Notes in Math., **917**, Springer, Berlin-New York, 1982.
- [CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, *K*-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 1–64, Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [CTOj] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 141–158.
- [CTSS] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 3, 763–801. Doc. Math. **1** (1996), No. 17, 395–416.
- [Fr] E. Frossard, *Fibres dégénérées des schémas de Severi-Brauer d'ordres*, J. Algebra **198** (1997), no. 2, 362–387.
- [K1] B. Kahn, *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, Algebraic *K*-theory (Seattle, WA, 1997), 149–174, Proc. Sympos. Pure Math., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

- [K2] B. Kahn, *Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras*, Documenta Mathematica, Extra Volume : Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 317–369.
- [MS] A. S. Merkur'ev and A. A. Suslin, *K -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136.
- [PS] R. Parimala and V. Suresh, *Degree three cohomology of function fields of surfaces*, arXiv :1012.5367v1 (2010).
- [Pe] E. Peyre, *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*, K -theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 369–401, Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [S1] D. J. Saltman, *Cyclic algebras over p -adic curves*, J. Algebra **314** (2007), no. 2, 817–843.
- [S2] D. J. Saltman, *Division algebras over surfaces*, J. Algebra **320** (2008), no. 4, 1543–1585.
- [Se] J-P. Serre, *Corps locaux*, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968.
- [Su] A. A. Suslin, *Quaternion homomorphism for the field of functions on a conic*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), no. 2, 292–296.